УДК 517.966

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ, В. В. КРАХОТКО

УПРАВЛЯЕМОСТЬ РЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

В статье рассматриваются задачи управляемости линейных дифференциально-алгебраических систем с распределенным запаздыванием по управлению.

Учитывая регулярность системы, показано, что задачи H-управляемости и полной H-управляемости равносильны посредством специальных преобразований H-управляемости и полной H-управляемости некоторой системы без запаздывания, для исследования которой привлекаются результаты, полученные авторами ранее.

Необходимые и достаточные условия управляемости описываются в терминах определяющих уравнений.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические системы; системы с запаздыванием в управлении; управляемость динамических систем.

In the paper we consider the problems of controllability for the linear differential-algebraic systems (LDAS) with a distributed delay in control.

Take into consideration of regular systems it is show that initial problems of H-controllability and H-complete controllability are equivalent by special transformations to H-controllability and H-complete controllability of delay-free system, which is analyzed with the use of results obtained earlier by the authors.

Necessary and sufficient conditions of controllability are described in terms of determining equations.

Key words: differential algebraic systems; systems with delay in control; controllability dynamical systems.

Рассмотрим систему управления

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^h B(s)u(t-s)\,ds,\ \ t \geq 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, u_0(\bullet) = \{u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0)\}, \tag{2}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$ – достаточно гладкое управление; A_0, A – постоянные $n \times n$ -матрицы; $h(h>0)$ – число (запаздывание); $B(s)$, $s \in [0,h]$, – $n \times r$-достаточно гладкая матричная функция ($B(s) \equiv 0$, $s \notin [0,h]$), x_0 – заданный n-вектор; $\varphi(t)$ – заданная кусочно-непрерывная r-вектор-функция.

Начальное состояние (2) назовем допустимым, если при этом состоянии система (1) имеет хотя бы одно решение.

Систему (1) будем называть регулярной, если регулярен пучок матриц $\lambda A_0 - A$, т. е. найдется число $\lambda_0 \in C$ такое, что $\det(\lambda_0 A_0 - A) \neq 0$.

Пусть $k \in N$ – индекс [1] матрицы A_0, а H – некоторая постоянная $l \times n$-матрица.

Определение 1. Регулярную систему (1) назовем H-управляемой, если для любого допустимого начального состояния (2) найдутся момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$, и k раз непрерывно дифференцируемое управление $u(t)$, $t \in [0, t_1 - h)$, $u(t) \equiv 0$, $t > t_1 - h$ такие, что решение $x(t)$, $t \geq 0$, системы (1), (2) удовлетворяет условию $Hx(t_1) = 0$.

Определение 2. Регулярную систему (1) назовем полностью H-управляемой, если для любого допустимого начального состояния (2) найдутся момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$, и k раз непрерывно дифференцируемое управление $u(t)$, $t \in [0,t_1-h)$, $u(t) \equiv 0$, $t > t_1-h$ такие, что решение $x(t)$, $t \geq 0$, системы (1), (2) удовлетворяет условию $Hx(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$.

Согласно [2], положим

$$x(t) = p(t) + \int_0^h M(s)u(t-s)ds, t \geq 0, \tag{3}$$

где $p(t)$ – некоторая n-вектор-функция, а $M(s)$ – некоторая $n\times r$-матричная функция.

Используя (3), система (1) приобретает вид

$$A\dot{p}(t) + A_0M(0)u(t) - A_0M(h)u(t-h) + \int_0^h A_0\dot{M}(s)u(t-s)ds =$$

$$= Ap(t) + \int_0^h AM(s)u(t-s)ds + \int_0^h B(s)u(t-s)ds.$$

Предположим, что $n\times r$-матричная функция $M(s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$A_0\dot{M}(s) = AM(s) + B(s), s \in [0,h] \tag{4}$$

с начальным условием

$$M(h)=0. \tag{5}$$

Для построения решения системы (4), (5), следуя [3], введем в рассмотрение так называемые базовые матрицы C_i, $i \in N_0$, которые являются решениями системы матричных уравнений:

$$C_0 = C_0A_0C_0,\ A_0C_0A = AC_0A_0,$$

$$C_jA_0C_i = -C_{j+i},\ C_jA_0C_0 = 0,$$

$$C_0A_0C_i = 0,\ C_jAC_0 = 0,\ C_0AC_i = 0,$$

$$A_0C_i = AC_{i+1} + \delta_i^0E,\ AC_m = 0,$$

$$C_iA_0 = C_{i+1}A + \delta_i^0E,\ C_mA = 0,\ i,\ \ j = \overline{1, m-1},$$

где δ_i^0 – символ Кронекера, E – единичная $n\times n$-матрица, m – индекс пары матриц (A_0, A).

Тогда решение системы (4), (5) равносильно решению системы

$$\dot{M}(s) = C_0AM(s) + \sum_{i=0}^m \left(\frac{d^i}{ds^i}\right)\left[C_iB(s)\right], s \in [0,h], \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^m \left(\frac{d^i}{ds^i}\right)\left[C_iB(s)\right]\Bigg|_{s=h} = 0. \tag{7}$$

Используя (6), (7), система (1), (2) записывается в виде

$$A_0\dot{p}(t) = Ap(t) + B_1u(t), t \geq 0, \tag{8}$$

$$p(0) = x_0 - \int_{-h}^0 M(-s)\varphi(s)ds, \tag{9}$$

где

$$B_1 = A_0\int_0^h e^{-C_0A\tau}\left(\sum_{i=0}^m \left(\frac{d^i}{d\tau^i}\right)[C_iB(\tau)]\right)d\tau.$$

Исходя из определений 1, 2 и указанных выше преобразований, ясно, что H-управляемость и полная H-управляемость системы (1), (2) равносильны H-управляемости и полной H-управляемости [3] системы (8), (9).

Обозначим через $\hat{A}_0 = (\lambda_0A_0 - A)^{-1}A_0$, $\hat{A} = (\lambda_0A_0 - A)^{-1}A_0$, $\hat{B} = (\lambda_0A_0 - A)^{-1}B_1$.

Следуя работам [4, 5], для системы (8) построим определяющие управления вида

$$Y_{t+1} = \hat{A}_0^dY_t + \hat{A}_0^d\hat{B}U_t^1,\ U_{t+1}^i = U_i^{i+1},\ i = \overline{1, k-1},$$

$$U_{t+1}^k = U_{t+k},\ P_t = C\left[Y_t, U_t^1, \ldots, U_t^k\right],\ t \geq 0,$$

где

$$Y_t \equiv 0,\ t = \overline{0, k-1},\ U_t \equiv 0,\ t \neq k,\ U_k = E_r,$$

$$C = \left[\hat{A}_0 \hat{A}_0^d \left(E_n - \hat{A}_0 \hat{A}_0^d \right) \hat{A}^d \hat{B}, \ldots, (-1)^{k-1} \left(E_n - \hat{A}_0 \hat{A}_0^d \right) \left(\hat{A}_0 \hat{A}_0^d \right)^{k-1} \hat{A}^d \hat{B} \right],$$

$\hat{A}_0^d, \hat{A}^d$ – обратные Дразина соответственно для матриц $\hat{A}_0, \hat{A}$.

Обозначим через P_t^* решение определяющих уравнений при условии $Y_1 = E_n,\ U_t \equiv 0,\ t \geq 0$.

Пусть для системы (1) выполняется условие (7). Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Система* (*1*) *H-управляема тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\operatorname{rank}(HP_1^*, HP_i, i = \overline{1, n+k}) = \operatorname{rank}\left(HP_i, i = \overline{1, n+k}\right).$$

Теорема 2. *Для полной H-управляемости системы* (*1*) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\operatorname{rank}(L, \bar{H}P_i, i = \overline{k+1, n+k}) = rank(L, \bar{H}),$$

где

$$L = \begin{bmatrix} HP_k & \ldots & HP_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ HP_{n+2k-1} & \ldots & HP_{n+k} \end{bmatrix}, \bar{H} = \begin{bmatrix} HP_1^* \\ \ldots \\ HP_{n+k}^* \end{bmatrix}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Campbell S. L., Meyer C. D., Rose N. J. Applications of the Drazin inverse to linear systems of Differential equations with Singular constant coefficients // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31, № 3. P. 411–425.
2. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. Полная управляемость на подпространство линейных систем с запаздыванием по управлению // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2006. № 3. С. 130–132.
3. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск, 2000.
4. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. К проблеме управляемости дифференциально-алгебраических динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1291–1292.
5. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. Управляемость на подпространство регулярных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 7. С. 1060–1062.

Поступила в редакцию14.06.13.

Георгий Прокофьевич Размыслович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

Валерий Васильевич Крахотко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.